Espaces vectoriels

Définition : Un <u>vecteur</u> u à n composantes est un élément du produit cartésien $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. Autrement dit, u est un n-uplet d'éléments dans $\mathbb{R}$.

On peut écrire un vecteur en colonne : $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ou en ligne
$u = (u_1 \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$. u_j est appelé j-ème coordonnée du vecteur u.

Par définition de produit cartésien, $u = (u_1, \dots, u_n) = v = (v_1 \dots v_n)$ si et seulement si

$u_j = v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Étant donnés deux vecteurs $u = (u_1 \dots u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$, on peut définir leur <u>somme</u>

$u + v := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$

On peut aussi multiplier un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ par un <u>scalaire</u> $\lambda \in \mathbb{R}$, selon la règle

$\lambda . u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ces deux opérations munissent $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'<u>espace vectoriel</u> (sur $\mathbb{R}$)

(~~Ces deux~~ Rmq : On pourrait de même définir un vecteur <u>complexe</u> comme un élément de $\mathbb{C}^n$. Un scalaire dans ce cas est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$.)

~~Ces deux opérat.~~

Définition : Un <u>espace vectoriel</u> (sur $\mathbb{R}$) est un ensemble E, [dans lequel est spécifié un élément 0_E (zéro)] et muni de deux opérations :

- l'addition $+ : E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1) commutativité : $x + y = y + x \quad \forall x, y \in E$.
2) associativité : $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in E$ (on note $x + y + z$)
3) élément neutre : $0_E + x = x \quad \forall x \in E$. ($\exists 0_E \in E$ t.q. ...) 0_E : élément neutre
4) inverse : $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ t.q. $x + y = 0_E$. y est appelé l'<u>inverse</u> de x, et noté $-x$.

C6 (2)

– la multiplication par un scalaire $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, satisfaisant les propriétés suivantes :

1) associativité : $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in E$.

2) distributivité scalaire : $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu \cdot x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in E$.

3) " vectorielle : $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ x, y \in E$.

4) élément neutre : $1 \cdot x = x \quad \forall x \in E$.

Propriétés :

1) 0_E est unique : (si $0_E'$ satisfait 3, on a $0_E' \overset{(3')}{=} 0_E + 0_E' \overset{(3)}{=} 0_E'$ ~~ok~~)

2) l'inverse $-x$ de x est unique $\forall x \in E$. (si $-x + x = y + x = 0_E$, alors $x - x + y \overset{4p}{=} 0_E + y \overset{3}{=} y$, $0_E - x \overset{3}{=} -x \Rightarrow y = -x$)

3) Si $x + y = x$ pour $x, y \in E$, alors $y = 0_E$

4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ (Si $\lambda \neq 0$, $\forall x$, $x + \lambda 0_E \overset{(+1)(4)}{=} \lambda\lambda^{-1} x + \lambda 0_E = \lambda(\lambda^{-1}x + 0_E) \overset{(+3)}{=} \lambda \cdot (\lambda^{-1} x) \overset{(.4)}{=} x \Rightarrow \lambda 0_E = 0_E$ (unicité de 0_E). Si $\lambda = 0$, $0 \cdot 0_E = (1-1) \cdot 0_E = 1 \cdot 0_E + (-1) \cdot 0_E = 0_E + 0_E = 0_E$)

5) $\forall x \in E$, on a $0 x = 0_E$ ($\left.\begin{array}{l}(1+0)x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x \\ \quad\ \ 1 \cdot x = x\end{array}\right\} \Rightarrow 0 \cdot x = 0_E$.)

6) Si $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$ sont t.q. $\lambda \cdot x = 0_E$, alors on a $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$
(Si $\lambda \neq 0$, alors $x = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ ok).

7) On a $(-1) \cdot x = -x$. $\forall x \in E$ ($0_E = 0 \cdot x = (1-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x \Rightarrow (-1) \cdot x = -x$.)

Exemple fondamental : $\mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ fois}})$, parfois noté 0_n, ou directement 0.

Combinaisons linéaires.

Def : ~~Soient u, v ∈~~ Soit E un espace vectoriel.

Une combinaison linéaire de deux vecteurs $u, v \in E$ est une expression de la forme $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de n vecteurs $u_1 \dots u_n \in E$ est une expression de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Sous-espaces vectoriels.

Définition : Soit F un sous-ensemble (non vide) d'un espace vectoriel E. F est un sous-espace vectoriel de E si les restrictions des opérations $+$ et $\cdot$ sur F munissent F de la structure d'un espace vectoriel.

Remarque : $0_E = 0_F \in F$, donc $F \neq \emptyset$ toujours.

Théorème : ~~F est un sous~~ Soit E un espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

i) $F \neq \emptyset$

ii) $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.

Preuve : ($\Rightarrow$) si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_F = 0_E \in F$ donc $F \neq \emptyset$.

Si F est un espace vectoriel, alors la $+$ et $\cdot$, $+ : E \times E \to E$, $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ peuvent être restreintes comme opérations $+ : F \times F \to F$, $\cdot : \mathbb{R} \times F \to F$, donc (ii) est vérifiée

($\Leftarrow$) Il faut montrer que si (i, ii) sont vérifiés, alors la restriction de $+$ et $\cdot$ à F munissent F d'une structure d'espace vectoriel.

- $0_E \in F$: étant $F \neq \emptyset$, $\exists x \in F$. par ii, ~~$0_E = x + (-1)$~~ $x \cdot 0_E = x - x = x + (-1)x \in F$.

Par ii, $+ : F \times F \to F$ (avec $\lambda, \mu = 1$) et $\cdot : \mathbb{R} \times F \to F$ (μ ou $y = 0$)

enfin, si $x \in F$, l'inverse $-x \in E$, il appartient à F ?

On a vu que $-x = (-1)\cdot x$. si $x \in F$, par (ii) $-x$ appartient à F □

Rmq: à la place de (ii), on peut mettre : (iia): $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on $\lambda x \in F$, (iib) $\forall x,y \in F$ on $x+y \in F$.

Corollaire : l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Preuve : Soit $(F_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de sous-espaces de E.

Par le thm précédent, il faut montrer que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ satisfait les conditions (i),(ii).

$\forall \alpha \in \Lambda$, $0_E \in F_\alpha \Rightarrow 0_E \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$. et (i) est vérifié.

Si $x,y \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\forall \alpha$, $x,y \in F_\alpha \Rightarrow$

Comme F_α est un sous-espace vectoriel, $\lambda x + \mu y \in F_\alpha$ $\forall \alpha$.

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$, et (ii) est vérifié. □

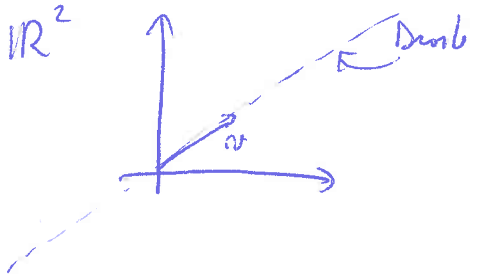
Exemples : 1) $\{0_E\}$ est le sous-espace vectoriel trivial de l'espace vectoriel E.

2) E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

~~3) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les droites vectorielles~~

Définition : Une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =: \mathrm{Vect}(v)$, avec $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$

Ex : $\mathbb{R}^2$



* Déf : Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, $w \in \mathbb{R}^n$.
w est colinéaire à v si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $w = \lambda v$.
$\Leftrightarrow w \in \mathrm{Vect}(v)$

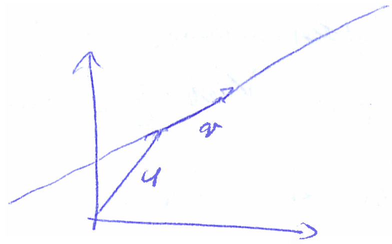
Rmq : Si $w \neq 0$, $w \in \mathrm{Vect}(v) \Leftrightarrow v \in \mathrm{Vect}(w)$.

3) Les plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$, de la forme $\{\lambda v + \mu w ; \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ avec $v,w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_3\}$ non colinéaires*

(v,w sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\neq (0,0)$ tq. $\lambda v = \mu w \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Vect}(w)$.)

4) La droite affine est l'ensemble de la forme

$\{\lambda v + u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. $v \neq 0_2$.



La droite affine est un espace vectoriel $\Leftrightarrow$

u ~~et v sont colinéaires~~ est colinéaire à v.

($\Leftarrow$) Si u est colinéaire à v, $\exists \lambda' \in \mathbb{R}$ t.q. $u = \lambda' v$, et

$\{\underbrace{\lambda v + u}_{(\lambda+\lambda')v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel.

($\Rightarrow$) Par la réciproque, si $\{\lambda v + u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel, on a que

$(v+u)+(v+u) \in V \Rightarrow 2v+2u = u+\mu v \Rightarrow u = (\mu - 2)v$. $\Rightarrow$ u colinéaire à v.

5) Solution d'un système linéaire homogène :

Exemple :

$\mathbb{R}^2 \quad (*)\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases}$.

Par le théorème, il faut montrer que si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) vérifient $(*)$, on a que $\lambda(x_1,x_2) + \mu(y_1,y_2)$ vérifie $(*)$ ~~de même~~ ou, de même façon, $\lambda(x_1,x_2)$ et (x_1+y_1, x_2+y_2) vérifient $(*)$.

mais $\{a(\lambda x_1 + \mu y_1) + b(\lambda x_2 + \mu x_2) = \lambda\underbrace{(ax_1+bx_2)}_{0} + \mu\underbrace{(ay_1+by_2)}_{0} = 0$.

de même pour la deuxième équation. OK

Sous-espace engendré par une partie.

Prop : Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un espace vectoriel E. L'espace

$\underbrace{\mathrm{Vect}(\mathcal{E})}_{\langle \mathcal{E} \rangle} := \bigcap_{V \supseteq \mathcal{E}} V$, où V est pris parmi les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{E}$, est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{E}$.

On dit que $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ est le sous-espace engendré par $\mathcal{E}$.

~~Preuve : Soit W le plus petit sous-espace vect. contenant $\mathcal{E}$.~~

~~Il faut montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) = W$.~~

~~W est un sous-espace $\Rightarrow W \supseteq \bigcap_{V \supseteq \mathcal{E}} V = \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$. Par ...~~

~~Par le corollaire Vect(E) est un espace vectoriel.~~
~~De plus, Vect(E) contient E par construction~~

Par le corollaire, Vect ($\mathcal{E}$) est un espace vectoriel.

Par construction, Vect ($\mathcal{E}$) contient ($\mathcal{E}$).

Si W est un autre espace vectoriel ~~avec~~ t.q. $W \supseteq \mathcal{E}$. Alors $W \supseteq \text{Vect}(\mathcal{E}) = \bigcap_{V \supseteq \mathcal{E}} V$. □

Exemples. - Si $v \not\in \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ Vect(v) est la droite vectorielle engendrée par v.

- Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors Vect(V) = V.

- Soit (*) le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(x_1, x_2, x_3) est solution du système $\Leftrightarrow$ $x_2 = -x_3$ et $x_1 = -2x_3$ $\Leftrightarrow$ (x_1, x_2, x_3) est un multiple de $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc l'espace vectoriel V donné par les solutions de (*) est égal à ~~Span~~ Vect $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Prop: Vect ($\mathcal{E}$) est l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathcal{E}$. $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Preuve: Soit $W = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathcal{E} \}$.

Évidemment, $W \supseteq \mathcal{E}$. Montrons que W est un sous-espace vectoriel de E.

$0 \in W$ (il suffit prendre $n=0$, ou $\lambda_i = 0\ \forall i$). donc $W \neq \emptyset$.

Si $\underset{\in W}{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $\underset{\in W}{w} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$, $v_i, w_j \in \mathcal{E}$ $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$, alors

$\lambda v = \sum (\lambda \lambda_i) v_i \in W$, et $v + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j \in W$.

Comme Vect ($\mathcal{E}$) est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $W \supseteq \text{Vect}(\mathcal{E})$.

Réciproquement, $\forall\, V \supseteq \mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel, alors V contient toutes combinaisons linéaires (finies) d'éléments dans $\mathcal{E}$, donc $W \subseteq V$ ~~∀V~~ $\Rightarrow W \subseteq \text{Vect}(\mathcal{E}) = \bigcap_{V \supseteq \mathcal{E}} V$.

□

Produits - sommes - sommes directes :

Produit.

Déf : Soient E, F deux espaces vectoriels. Le produit cartésien $E \times F$ admet une structure d'espace vectoriel, par les lois :

$+$: si $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in E \times F$, $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1+v_2, w_1+w_2) \in E\times F$

$\cdot$: Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(v, w) \in E \times F \Rightarrow \lambda\cdot(v,w) = (\lambda\cdot v, \lambda\cdot w) \in E\times F$.

Exemple : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ s'identifie à $\mathbb{R}^{n+m}$

$$((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_m)) \quad \xrightarrow{\ni} \quad (x_1 \dots x_n, y_1, \dots y_m).$$

En particulier $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$

Somme : Déf : Soit E un sous-espace, V_1, V_2 sous-espaces vect. de E.

L'espace $\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ est un sous espace vectoriel de E, appelé la SOMME de v_1 et v_2, et noté $V_1 + V_2$.

Proposition : $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$.

Preuve : $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel qui contient $V_1 \cup V_2$, donc $V_1 + V_2 \supseteq \mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$.

$V_1 + V_2 \neq \emptyset$, si $v_1 + v_2 \in V_1 + V_2 \Rightarrow \lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \in V_1 + V_2$

Si $v_1 + v_2, w_1 + w_2 \in V_1 + V_2$

$\Rightarrow (v_1+v_2) + (w_1+w_2) = (v_1+w_1) + (v_2+w_2) \in V_1 + V_2$ □

Réciproquement, $\mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$ contient tous les éléments de la forme $v_1 + v_2$ (Prop ↑). donc $V_1 + V_2 \subseteq \mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$.

□

Somme directe :

Proposition : Soient V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $E = V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(b) $\forall v \in E$ s'écrit de façon unique comme $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Preuve ! (a ⇒ b) Comme $E = V_1 + V_2$, $\forall v \in E \ \exists \underset{\in V_1}{v_1}, \underset{\in V_2}{v_2}$, $v = v_1 + v_2$

Suppose que $\underset{\in V_1}{w_1}, \underset{\in V_2}{w_2}$ ont la même propriété : $v = w_1 + w_2$.

$\Rightarrow v_1 + v_2 = w_1 + w_2 \iff \underbrace{v_1 - w_1}_{\in V_1} = \underbrace{w_2 - v_2}_{\in V_2} \Rightarrow \underset{\underset{w_2 - v_2}{\shortparallel}}{v_1 - w_1} \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\Rightarrow v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ (b)

(b ⇒ a) $\forall v \in E \ \exists!\, v_1, v_2 \mid v = v_1 + v_2$

$\Rightarrow V_1 + V_2 \supseteq E$, mais $V_1 + V_2 \subseteq E \Rightarrow V_1 + V_2 = E$.

Si $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v = \underset{\in V_1}{v} + \underset{\in V_2}{0} = \underset{\in V_1}{0} + \underset{\in V_2}{v}$. Par unicité, $v = 0$. □

Définition : Si V_1, V_2 satisfont (a) ou (b), on dit que E est la <u>somme directe</u> de V_1 et V_2 : $E = V_1 \oplus V_2$

On dit aussi que V_1 et V_2 sont des <u>espaces supplémentaires</u>

Exemple : $\mathbb{R}^3$ est la somme directe du plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et
horizontal
la droite $\mathrm{Vect}\left(\left\{\underset{v}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}\right) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$.

Plus généralement $E = P \oplus \mathrm{Vect}(v)$,

$\forall v \notin P$.